www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHEMATIQUES - EXERCICES

Options T et TA
Durée : 4 heures

Tout document est interdit , y compris la notice d'utilisation d'une calculatrice.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

$\mathfrak{R}$ désigne le corps des nombres réels.

EXERCICE I

Soit $E = \mathfrak{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathfrak{R}$, muni de sa base canonique $B = \{ e_1 , e_2 , e_3 \}$.

f est l'endomorphisme de E admettant A pour matrice dans la base B avec $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Question 1 : Quels sont les éléments propres de f ?

Question 2: Déterminer une nouvelle base $V = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ de E , constituée d'éléments qui s'écrivent sous la forme $e_1 + y.e_2 + z.e_3$, y et z réels , et dans laquelle f admette la matrice R

avec $R = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ où α et β sont deux réels à déterminer .

Question 3 : Soit $U : \mathfrak{R} \longrightarrow E$ de classe C^2 vérifiant : $\forall t \in \mathfrak{R}$ $\dfrac{d^2U}{dt^2}(t) = f[U(t)]$

$t \longrightarrow U(t)$

Exprimer la relation ci - dessus à l'aide des coordonnées $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ de U(t) dans la base V.
Résoudre le système différentiel ainsi obtenu.

EXERCICE II

L'espace orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Σ désigne la surface formée des points M dont les coordonnées x , y et z vérifient

$(z + a)^2 = x^2 + y^2$ avec a réel strictement positif donné.

Γ_1 (respectivement Γ_2) est la courbe intersection de Σ avec le plan $z = 0$ (respectivement $z = a$) .

Question 1: Montrer que les normales à Σ le long de Γ_1 (respectivement Γ_2) se coupent en un point O_1 (respectivement O_2) . Calculer les coordonnées de ces deux points.

Question 2:

Soit S_1 la portion de la sphère de centre O_1, contenant Γ_1 et située dans le demi-espace $z \leq 0$.

Soit S_2 la portion de la sphère de centre O_2 , contenant Γ_2 et située dans le demi-espace $z \geq a$.

Soit S_3 la portion de la surface Σ limitée par les plans $z = 0$ et $z = a$.

S désigne la surface réunion de S_1 , S_2 et de S_3 , c'est à dire $S = \bigcup_{i=1}^{i=3} S_i$

2-1) Représenter graphiquement l'intersection de S avec le plan $y = 0$.

2-2) S est une surface fermée , frontière d'un solide borné D . Calculer le volume de D.

Tournez la page S.V.P.

2-3) **Réservée aux candidats de l'option T:**

Calculer le flux de $\vec{W}$ sortant de S où $\vec{W}$ est le champ de vecteurs défini par:

$$\vec{W}(x, y, z) = (3.x^2 + 4.z.x + 3.x).\vec{i} + (7.y - 6.x.y).\vec{j} - 2.z^2.\vec{k}$$

EXERCICE III

Vocabulaire: Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \Re$ vérifie:

la condition (i) ou condition de contraction sur [a , b]

s'il existe un élément k de [0 , 1 [tel que :

$\forall x \in [a, b]$, $\forall y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k.|x - y|$.

la condition (ii) ou condition d'inclusion sur [a , b]

si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \in [a, b]$.

la condition (iii) sur [a , b]

si f est de classe C^1 sur [a , b] et vérifie $\sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)| < 1$

Première partie:

1-1) Prouver que la condition (iii) entraine la condition de contraction sur [a , b].

1-2) On suppose que f vérifie (i) et (ii).

1-2-1) Montrer que l'équation f(x) = x admet alors une solution unique , notée s , dans [a , b].

1-2-2) Montrer que pour TOUT choix de u_0 dans [a , b] , la suite récurrente définie par

$u_n = f(u_{n-1})$ converge vers s. Vérifier que $\forall$ n entier , $|s - u_n| \leq k^n.|b - a|$.

1-2-3) La fonction f , les réels a , b , u_0 , k , la précision ε étant connus,

décrire EN FRANCAIS , un algorithme permettant d'approcher s à la précision ε .

Deuxième partie: Application à la résolution de $P(x) = 0$ avec $P(x) = x^5 - 5.x + 2$.

2-1) Prouver que P(x) = 0 admet une solution unique , notée r , dans $I = [-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}]$

2-2) L'équation P(x) = 0 est traitée sous la forme $x = f_1(x)$

avec $f_1(x) = x + \lambda.P(x)$.

2-2-1) Trouver l'ensemble des réels λ tels que f_1 vérifie la condition (iii) sur I .

2-2-2) La valeur $\lambda = -0{,}03$ est choisie. Montrer que la suite récurrente donnée par w_0 élément quelconque de I et $w_n = f_1(w_{n-1})$, converge vers r.

2-2-3) En prenant $\lambda = -0{,}03$ et $w_0 = -1{,}7$ estimer le nombre entier n pour que

$|w_n - r| < 10^{-3}$. Indiquer sur la copie les valeurs de w_j pour j allant de 1 à n .

Tournez la page S . V . P .

EXERCICE IV

a est un réel positif donné.

Première partie:

Soit $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$, impaire , périodique de période 2π , donnée sur $[\,0\,,\pi\,]$ par $\forall\, x \in [\,0\,,\pi\,]\ ,\quad f(x) = x^4 - 2.\pi.x^3 + \pi^3.x$.

1-1) Etablir le tableau de variation de la restriction de f à $[\,0\,,\pi\,]$ .Préciser les valeurs de $f^{(k)}(0)$ et de $f^{(k)}(\pi)$ pour k élément de $\{\,0\,,1\,,2\,\}$.

1-2) Déterminer la série de Fourier de f sous forme d'une expression en sinus et en cosinus.

Etudier la convergence de cette série et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2.k+1)^5}$.

Deuxième partie:

La suite de fonctions $(u_n)_{n \in N}$ est définie sur $[\,0\,,\pi\,]\ X\ \mathfrak{R}^+$ par:

$$u_n(x\,,t) = \frac{1}{(2.n+1)^5}\ \sin[(2.n+1).x]\ .\cos[(2.n+1).a.t] \qquad 0 \le x \le \pi \quad \text{et} \quad t \in \mathfrak{R}^+$$

2–1) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge . Soit U la fonction somme de cette série.

2-2) Prouver l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$.

Montrer que $\forall\, x \in [\,0\,,\pi\,]\,,\ \forall\, t \in \mathfrak{R}^+\ ,\quad a^2.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x\,,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x\,,t) = 0.$

Troisième partie:

3-1) g est une fonction de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}$, de classe C^2 , impaire, périodique de période 2π .

Soit $G : [\,0\,,\pi\,]\ X\ \mathfrak{R}^+ \longrightarrow \mathfrak{R}$

$$(x\,,t) \longrightarrow G(x\,,t) = \frac{1}{2}\,[\,g(x + a.t) + g(x - a.t)\,]$$

Montrer que $\forall\, x \in [\,0\,,\pi\,]\ ,\ \forall\, t \in \mathfrak{R}^+\ ,\quad a^2.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x\,,t) = 0.$

3–2) Préciser les valeurs de $G(0\,,t)\,,\ G(\pi\,,t)\,,\ G(x\,,0)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(x\,,0)$ pour $\begin{matrix} x \in [\,0\,,\pi\,] \\ t \in \mathfrak{R}^+ \end{matrix}$

3–3) Déterminer la fonction g de sorte que $\forall\, x \in [\,0\,,\pi]\,,\ \forall\ t \in \mathfrak{R}^+\ ,\ U(x\,,t) = G(x\,,t)$.

- - - - - - - - - - -

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail